

## Lösen von Exponentialgleichungen

### Beispiele:

1.  $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$  "Probieren"

2.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \frac{27}{64} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

3.  $2^{3x-2} = 2^7$  "Exponentenvergleich"  
 $\Rightarrow 3x - 2 = 7 \Rightarrow x = 3$

4.  $5^x = 30$

Auflösen nach x liefert:

$x = \log_5 30$  (Logarithmus von 30 zur Basis 5)

### Besondere Logarithmen:

a) Zehnerlogarithmus (Basis 10)

$\log_{10} 3 = \lg 3 \approx 0,47712$

b) Natürlicher Logarithmus (Basis e)

$\log_e 3 = \ln 3 \approx 1,0986$

### Berechnung von Logarithmen mit anderer Basis mit Hilfe von lg bzw. ln:

$$\log_c a = \frac{\lg a}{\lg c} = \frac{\ln a}{\ln c}$$

Beispiel:  $\log_5 30 = \frac{\lg 30}{\lg 5} \approx 2,1133$

Aufgaben:

1  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,2$  ☐

2  $2^{x-1} = 35$  ☐

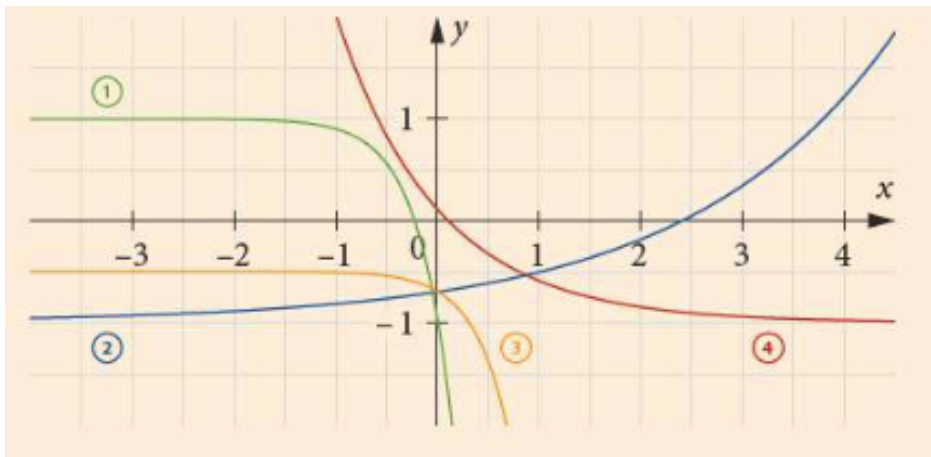
3  $\frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250$  ☒

4  $4^{3z-2} = 4^{z+1}$  ☐

5  $e^{5x} + 5 = 5e^{5x}$  ☒

- 6 Berechnen Sie Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen.  
 Ordnen Sie mithilfe der Ergebnisse jeden Funktionsterm dem richtigen Graphen zu. ☒

$f(x) = -2e^{3x} + 1$   
  $g(x) = 0,3e^{0,5x} - 1$   
  $h(x) = -0,2e^{x-1} - 0,5$   
  $k(x) = 3e^{-x-1} - 1$



- 7.0 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g mit  $f(x) = 8e^{-x} - 3$  und  $g(x) = 3 - e^x$ . ☐

- 7.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen mit den Koordinatenachsen.

- 7.2 Zeichnen Sie die beiden Graphen für  $-1 \leq x \leq 2$  in ein gemeinsames Koordinatensystem.

- 7.3 Ermitteln Sie rechnerisch die gemeinsamen Punkte beider Graphen.

- 8 Die Krebszellen einer Ratte in einem Versuchslabor vermehren sich gemäß der Funktion f mit  $f(t) = 2e^{1,6094t}$ , wobei  $t \geq 0$  den Zeitpunkt in Tagen und  $f(t)$  den Bestand der Krebszellen zum Zeitpunkt t angibt. Sobald 8500 Krebszellen entstanden sind, soll der Ratte ein Zusatzmedikament injiziert werden. Ermitteln Sie diesen Zeitpunkt. ☒

9.0 Der Abbau eines Medikaments im Körper eines Menschen folgt der Funktion  $f$  mit  $f(t) = 100e^{-0,125t}$  für  $t \geq 0$  ( $t$  in Tagen nach Beginn der Einnahme und  $f(t)$  die Konzentration des Medikaments im Blut in mg).

9.1 Berechnen Sie, wie hoch die Konzentration des Medikaments im Körper nach 10 Tagen ist. ☐

9.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen die Konzentration erstmals unter 10 mg gesunken ist. ☒

10 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. (Abitur 2019 Teil 1)

$$e^{x^2} = e^{2x-1}. \quad \text{○}$$

11 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen. (Abitur 2022 Teil 1)

$$(e^x - 2)^2 - 4 = 0 \quad \text{ⓧ}$$

12 Lösen Sie die folgende Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen.

$$(e^x)^2 - 25 = 0 \quad \text{ⓧ}$$

### Lösungen:

$$1. \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0,2$$

$$x = \log_{0,5} 0,2 \approx 2,3219$$

$$2. 2^{x-1} = 35$$

$$x-1 = \log_2 35 \Rightarrow x = \log_2 35 + 1 \approx 6,1293$$

$$3. \frac{1}{4} \cdot 5^{y+2} = 250$$

$$5^{y+2} = 1000 \Rightarrow y+2 = \log_5 1000 \Rightarrow y = \log_5 1000 - 2 \approx 2,2920$$

$$4. 4^{3z-2} = 4^{z+1}$$

$$3z-2 = z+1 \Rightarrow 2z = 3 \Rightarrow z = \frac{3}{2}$$

$$5. e^{5x} + 5 = 5e^{5x} \Rightarrow 4e^{5x} = 5 \Rightarrow e^{5x} = 1,25 \Rightarrow x = \frac{\ln(1,25)}{5} \approx 0,045$$

6

$$f: (1) \quad f(0) = 1 - 2e^{3x} + 1 = 0 \Rightarrow e^{3x} = 0,5 \Rightarrow x = \frac{\ln(0,5)}{3} \approx -0,23$$

$$S_y(0|1) \quad N(-0,23|0)$$

$$g: (2) \quad g(0) = -0,7 \quad 0,3e^{0,5x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{0,5x} = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{0,5} \approx 2,41$$

$$S_y(0|-0,7) \quad N(2,41|0)$$

$$h: (3) \quad h(0) = -0,57 \quad -0,2e^{x-1} - 0,5 = 0 \Rightarrow e^{x-1} = -2,5 \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

$$S_y(0|-0,57)$$

$$k: (4) \quad k(0) = 0,10 \quad 3e^{-x-1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{-x-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow -x-1 = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x = -1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,1$$

$$S_y(0|0,10) \quad N(0,1|0)$$

7.1

$$f(0) = 5 \Rightarrow S_y(0/5)$$

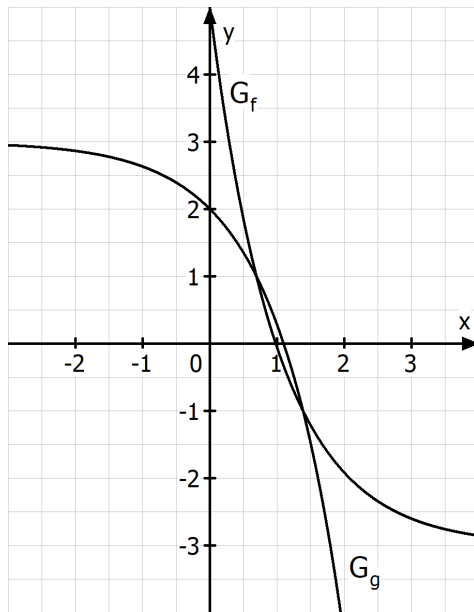
$$8e^{-x} - 3 = 0 \Rightarrow 8e^{-x} = 3 \Rightarrow e^{-x} = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\ln \frac{3}{8}}{-1} \approx 0,98 \Rightarrow N(0,98/0)$$

$$g(0) = 3 \Rightarrow S_y(0/3)$$

$$3 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3 \approx 1,10 \Rightarrow N(1,10/0)$$

## 7.2



## 7.3

$$8e^{-x} - 3 = 3 - e^x \Rightarrow 8e^{-x} + e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3e^x + 8 = 0$$

$$\text{Substitution: } z = e^x$$

$$\Rightarrow z^2 - 3z + 8 = 0 \Rightarrow z_1 = 2 \quad z_2 = 4$$

Resubstitution:

$$e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2 \quad e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

$$\Rightarrow S_1(\ln 2 / 1) \quad S_2(\ln 4 / -1)$$

$$8 \cdot 2 \cdot e^{1,6094t} = 8500 \Rightarrow e^{1,6094t} = 4250 \Rightarrow 1,6094t = \ln(4250) \Rightarrow t = \frac{\ln(4250)}{1,6094} \approx 5,19 \text{ Tage}$$

$$9.1 \quad f(10) \approx 28,65 \text{ mg}$$

## 9.2

$$100e^{-0,125t} < 10 \Rightarrow e^{-0,125t} < 0,1 \Rightarrow -0,125t < \ln(0,1) \Rightarrow t > \frac{\ln(0,1)}{-0,125} \approx 18,42$$

Nach 18,42 Tagen ist die Konzentration des Medikaments im Körper unter 10 mg gesunken.

$$10 e^{x^2} = e^{2x-1} \Rightarrow x^2 = 2x-1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

11

$$\begin{aligned}(e^x - 2)^2 - 4 &= 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x + 4 - 4 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x = 0 \\ \Rightarrow e^x(e^x - 4) &= 0 \quad e^x = 0 \text{ (f)} \quad e^x - 4 = 0 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln(4)\end{aligned}$$

12  $(e^x)^2 = 25 \Rightarrow 1) e^x = -5$  geht nicht      2)  $e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5$